ESSEC Option scientifique Mathématiques I

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère dans ce problème une fonction f à valeurs réelles définie sur [-2, -1] et l'on se propose de la prolonger en une fonction F à valeurs réelles de classe C^1, et vérifiant la relation $F'(x) = F(x - x^2)$ pour $x \geq -1$.

Dans la partie I, on étudie une suite utilisée dans la partie II.
On prolonge alors f en une fonction F vérifiant la relation précédente sur [-1, 0], puis sur [-1, 2], ce qui fait respectivement l'objet des parties II et III.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I

1°) Etude d'une fonction auxiliaire.
On considère dans cette question la fonction ψ définie sur **R** par $\psi(x) = x - x^2$.
a) Etudier les variations et représenter graphiquement cette fonction ψ.
b) Etablir, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que ψ induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 0]$.
c) Etudier les variations et représenter graphiquement (sur la figure précédente) la bijection réciproque.

2°) Etude d'une suite définie par récurrence.
On considère la suite (x_n) de premier terme $x_0 = -2$ et définie pour $n \geq 1$ par:

$$x_n - x_n^2 = x_{n-1} \text{ et } x_n < 0.$$

(on donne ainsi un procédé permettant de définir x_n en fonction de x_{n-1}.)

a) Déterminer x_1 et x_2, puis montrer que, pour tout nombre entier naturel n, le nombre réel x_n est bien défini, de façon unique, à partir de x_{n-1}.
b) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (x_n), puis montrer que (x_n) converge vers 0.
c) On pose pour tout nombre entier naturel n:

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1 + u_n), \quad w_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n).$$

- Prouver la convergence de la série $\sum u_n$, et déterminer sa somme.
- Prouver la convergence de la série $\sum v_n$, et donner un majorant de sa somme.
- Prouver la convergence de la suite (w_n), et montrer que $2 \leq \lim(w_n) \leq 9$.

Dans la suite, on considère une fonction f à valeurs réelles positives, de classe C^1 sur le segment [-2, -1] et vérifiant la relation $f'(-1) = f(-2)$.

Partie II

On étudie dans cette partie le problème P0 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 0] \to \mathbf{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe C^1 sur [-2, 0].
H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 0].

1°) Unicité d'une solution F.
On suppose qu'il existe une fonction F vérifiant les trois hypothèses précédentes.
a) Si t est un réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$, établir que $t-t^2$ appartient à $[x_{n-1}, x_n]$.

b) Etablir que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_1, x_2]$:

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t - t^2)dt.$$

c) Etablir pour $n \geq 2$ que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t - t^2)dt.$$

En déduire que la connaissance de F sur $[x_{n-1}, x_n]$ détermine F sur $[x_n, x_{n+1}]$.
d) Quelle est la réunion I des intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n \geq 0$?
En déduire que, s'il existe une solution F au problème P0, celle-ci est unique.

2°) Existence d'une solution F.
On construit sur I une fonction F de la façon suivante:
la fonction F est égale à f sur [-2, -1] puis, la supposant ensuite connue sur $[x_{n-1}, x_n]$ pour $n \geq 1$, on pose pour tout nombre réel x appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t - t^2)dt.$$

a) Montrer, pour tout nombre entier naturel n, que la fonction F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$ et préciser F'(x) en fonction de F et de x.
Préciser les dérivées à droite et à gauche de F en x_1, puis, de façon générale, en x_n.
En déduire que la fonction F est de classe C^1 sur I.
b) Etudier le sens de variation de F sur $[x_1, x_2]$, puis montrer que F est croissante sur [-1, 0[.
c) On note M le maximum de la fonction positive f sur [-2, -1]. Etablir, pour tout nombre réel x appartenant à $[-2, x_{n+1}]$, que $0 \leq F(x) \leq Mw_n/2$.
En déduire que la fonction F est majorée sur l'intervalle [-2, 0[.

d) Etablir que F(x) admet une limite L quand x tend vers 0. On pose alors F(0) = L.
Prouver, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que F est de classe C^1 sur [-2, 0] (on précisera F'(0)), puis que F est solution du problème P0.

3°) Etude du signe de L.
a) Déterminer le signe de L = F(0).
b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f le nombre L est-il nul?

Partie III

On étudie dans cette partie le problème P1 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction F: [-2, 1] → **R** vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe C^1 sur [-2, 1].
H2] F(x) = f(x) pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 1].

On introduit à cet effet les notations suivantes:
- E désigne l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur [0, 1] et telles que, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], on ait $g'(x) = g(x - x^2)$.
- ϕ désigne l'application associant à tout élément g de E le nombre réel g(0).

1°) Propriétés de l'application ϕ.
a) Prouver que E est un espace vectoriel, et que l'application ϕ est linéaire sur E.
b) Soit g un élément du noyau de ϕ et M le maximum de la fonction |g| sur [0, 1/4].
- Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], on a $|g(x)| \leq Mx$.
- En déduire que M = 0, puis que g est la fonction nulle sur [0, 1]. Conclure.

2°) Etude d'une suite de fonctions (g_n).
On définit une suite de fonctions (g_n) de [0, 1] dans **R** en posant $g_o(x) = 1$, puis pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x appartenant à [0, 1]:

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2)dt.$$

a) Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$.
b) Etablir que g_n est une fonction polynôme. Notant d_n son degré, on exprimera d_{n+1} en fonction de d_n, puis l'on en déduira d_n en fonction de n.
c) Etant donné un nombre réel x appartenant à [0, 1], établir par récurrence sur n la double inégalité suivante:

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], que la suite $(g_n(x))$ est croissante, majorée par e^x, donc convergente vers une limite que l'on conviendra de noter g(x) (et g réalise donc une application de [0, 1] dans **R**).

3°) Etude de la fonction g définie par $g(x) = \lim g_n(x)$.
a) Etablir, pour tout couple (n, p) de nombres entiers naturels et tout nombre réel x appartenant à [0, 1]:

$$0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

En déduire, pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x tel que $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout couple (x, h) de nombres réels tels que x et x+h appartiennent à [0, 1]:

$$|g(x+h) - g(x)| \leq 2(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) + |g_n(x+h) - g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de n puis de h, que $|g(x+h) - g(x)|$ peut être rendu inférieur à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.
En déduire enfin que g est continue en tout x appartenant à [0, 1], et donc sur [0, 1].
c) Prouver, pour $0 \leq x \leq 1$, que la limite de l'expression suivante est nulle:

$$\int_0^x g(t - t^2)dt - \int_0^x g_n(t - t^2)dt.$$

En revenant à la définition de la suite (g_n), en déduire que:

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t - t^2)dt.$$

d) Prouver enfin que g est un élément de E tel que $\phi(g) = 1$.

4°) Résolution du problème P1.
a) Déduire des questions précédentes que l'application ϕ est bijective, et donner la dimension de l'espace vectoriel E.
b) Déduire des résultats des parties II et III qu'il existe une et une seule fonction F solution du problème P1.

5°) Résolution du problème P2.
On étudie enfin le problème P2 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction F: [-2, 2] → **R** vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe C^1 sur [-2, 2].
H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 2].
a) Prouver que, si F est solution du problème P2, l'application $x \to F(x) + F(1-x)$ est constante sur [-1, 2].
b) En déduire que le problème P2 admet une solution F et une seule.